Bemærkninger om Integration af Differentialligningen $f\left(\frac{du}{dz}, u\right) = 0.$

Af

P. C. V. Hansen.

Den Opgave, hvis Løsning her er forsøgt, drejer sig om Integration af Differentialligningen

$$f\left(\frac{du}{dz}, u\right) = 0, \tag{1}$$

hvor f er en rational Funktion af $\frac{du}{dz}$ og u, i de Tilfælde, hvor u er en algebraisk Funktion af z, eller hvor u er en enkelt periodisk Funktion af z og kun har et endeligt Antal Værdier for hver Værdi af z.

Spørgsmaal af denne Art have oftere været behandlede. I første Række maa nævnes, at de i høj Grad have tiltrukket sig Abels Opmærksomhed. Han kommer paa flere Steder i sine Skrifter tilbage til den Opgave, at undersøge, hvorvidt

$$\int F(x) \frac{dx}{\sqrt{R(x)}},$$

hvor $F(x)$ er en rational Funktion af x, $R(x)$ et Polynomium af fjerde Grad, kan udtrykkes ved en enkelt Logarithme af en algebraisk Funktion. Det er let at se, at dette er et specielt Tilfælde af Integration af (1) ved enkelt periodiske Funktioner. Fremstilling af Integralet

$$\int \frac{(x + A)\, dx}{\sqrt{x^4 + \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta}}$$

ved en enkelt Logarithme er senere behandlet af Tchébychef (Liouvilles Journal 1864) og af Zolotareff (Math. Ann. V)[1]. Liouville har i Journ. de l'école polyt. cah. 22 integreret (1), forsaavidt den lader sig integrere ved algebraiske Funktioner. Den samme Opgave er med Benyttelse af geometriske Hjælpemidler løst af Dr. Zeuthen (Compt. rend. 10. Maj 1880). I cah. 36 af Journ. de l'école polyt. have Briot og Bouquet integreret Ligningen (1) i de Tilfælde, hvor den kan tilfredsstilles ved éntydige algebraiske, enkelt eller dobbelt periodiske Funktioner. Svenskeren Rydberg har i Lunds Universitets Aarsskrift for 1879 angivet Betingelserne for Existensen af et algebraisk Integral, og endelig har en anden svensk Forfatter Julius Møller leveret en Doktorafhandling med Titel «Integration af differentialequationen $F\left(u, \frac{du}{dz}\right) = 0$ med duppelperiodiska Funktioner, Lund 1879». Den Behandlingsmaade, jeg i det følgende har forsøgt, er rent funktionstheoretisk.

1.

Af (1) faar man
$$\frac{du}{dz} = \psi(u),$$
hvor $\psi(u)$ er algebraisk. Sætter man
$$\frac{1}{\psi(u)} = \varphi(u),$$
saa har man
$$\int \varphi(u)\,du = z + C. \tag{2}$$
Skal u være en algebraisk Funktion af z, maa z ogsaa være en algebraisk Funktion af u. Integralet (2) maa da tilfredsstille visse Betingelser. Dette Integral har i Almindelighed uendelig mange Værdier for hver Værdi af u. Disse lade sig dele i Grupper svarende til de forskjellige Værdier af $\varphi(u)$, saaledes at Forskjellen mellem hvilkesomhelst to, som høre til samme Gruppe og svare til samme Værdi af $\varphi(u)$, er en Sum af hele Multipla af Periodicitetsmoduler for Integralet (2)[2]. Naar z skal

---

[1]) Se desuden Zolotareff: «Theorie des nombres entiers complexes.» St. Pétersbourg.

[2]) Königsberger: Theorie d. ell. Fct., sjette Forelæsning.

være en algebraisk Funktion af u, maa Integralet for enhver Værdi af u kun have et endeligt Antal af Værdier. Dertil kræves, at alle Periodicitetsmoduler forsvinde.

Naar denne Betingelse er opfyldt, kan man omvendt vise, at z er en algebraisk Funktion af u. Integralet (2) kan for endelige Værdier af u kun blive uendeligt, hvis $\varphi(u) = \infty$. Sker dette for $u = a$, saa har $\varphi(u)$ i Nærheden af $u = a$ en Udvikling efter stigende Potenser af $u - a$, som kun indeholder et endeligt Antal Led med negativ Exponent. I Udviklingen forekommer intet Led af Formen

$$\frac{c}{u - a};$$

thi Omgang om $u = a$ vilde da, i Strid med Forudsætningen, indføre en Periodicitetsmodulus $c \,.\, 2\pi i$. Ved at udføre Integrationen i (2) faar man for z en Udvikling efter stigende Potenser af $u - a$, kun indeholdende et endeligt Antal Led med negativ Exponent eller maaske slet ingen saadanne Led. Hvis z her bliver uendelig, kan den altsaa kun blive uendelig af en endelig Orden. I Nærheden af $u = \infty$ kan $\varphi(u)$ udvikles efter aftagende Potenser af u, saaledes at der kun forekommer et endeligt Antal Led med positiv Exponent eller slet ingen saadanne Led. Blandt Leddene med negativ Exponent kan $\frac{1}{u}$ ikke forekomme af samme Grund som før. For z faar man en Række efter aftagende Potenser af u, og z bliver ogsaa her kun uendelig af en endelig Orden eller slet ikke uendelig. I et Punkt b, hvor $\varphi(u)$ ikke er uendelig, fremstilles z ved en Række efter stigende Potenser af $u - b$ kun indeholdende Led med positiv Exponent. z har med de her gjorte Forudsætninger det samme Antal Værdier som $\varphi(u)$.

Da saaledes z kun er uendelig for et endeligt Antal Værdier af u og hver Gang kun af en endelig Orden, og da z desuden overalt har det samme endelige Antal Værdier som $\varphi(u)$, saa er Ligningen mellem u og z algebraisk, og med Hensyn til z er den af samme Grad som (1) med Hensyn til $\frac{du}{dz}$.

2.

Derefter skal det vises, hvorledes man bestemmer den algebraiske Ligning mellem u og z, hvis den existerer.

Naar (1) med Hensyn til $\frac{du}{dz}$ er af n^{te} Grad, har den søgte Ligning Formen

$$U_0 z^n + U_1 z^{n-1} + U_2 z^{n-2} + \ldots . U_n = 0, \tag{3}$$

hvor U_0, U_1, U_2, ... ere hele, rationale Funktioner af u. Graden af (3) med Hensyn til u kan bestemmes ved følgende Sætning[1]): Naar z i (3) for enhver af Værdierne

$$a_1, a_2, a_3 \ldots . a_r$$

har éntydig Rækkeudvikling og er uendelig med Ordenstallene

$$m_1, m_2, m_3, \ldots . m_r,$$

og naar endvidere z for Værdierne

$$b_1, b_2, b_3, \ldots . b_s$$

har flertydige Rækkeudviklinger, som lade

$$q_1, q_2, q_3, \ldots . q_s$$

Værdier falde sammen i de paagjældende Punkter og her gjøre z uendelig stor med Ordenstallene

$$\frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2}, \frac{p_3}{q_3}, \ldots . \frac{p_s}{q_s},$$

saa kunne Graderne af Funktionerne

$$U_0, U_1, \ldots . U_n$$

ikke overstige

$$m_1 + m_2 + \ldots . m_r + p_1 + p_2 + \ldots . p_s = \mu.$$

Nogle af Funktionerne U kunne være af lavere Grad end μ, men mindst én af dem maa naa denne Grad. Mellem Værdierne a og b er Uendelig medregnet.

I det foregaaende har man nu Midler til at bestemme, for hvilke Værdier af u z bliver uendelig, og for hver af disse kan man finde z's Rækkeudvikling, altsaa ogsaa dets Ordenstal.

---

[1]) Königsberger: Theorie d. ell. Fct. Side 180.

Følgelig kan man bestemme Tallet μ. Nu indsættes i (3) for U'erne Polynomier af μ^{te} Grad med ubekjendte Koefficienter. Disse Koefficienter bestemmes ved at $\frac{du}{dz}$ fundet af (3) skal stemme med $\frac{du}{dz}$ i (1). Er Overensstemmelsen mulig, saa existerer der et algebraisk Integral, er den umulig, saa existerer der intet. Dette maa da hidrøre fra, at Periodicitetsmodulerne ikke alle forsvinde; thi disse Størrelsers Forsvinden er den nødvendige og tilstrækkelige Betingelse for Existensen af et algebraisk Integral.

Anm. Det er vel muligt ved tilnærmet Beregning af Periodicitetsmodulerne nogenlunde sikkert at afgjøre, om de forsvinde eller ej. Denne Regning er dog i Reglen ikke meget simpel. Dog gives der nogle særegne Tilfælde, hvor man med Lethed kan overbevise sig om Existensen af et algebraisk Integral. Sammenhængen dermed er følgende. Naar Graden af (1) i $\frac{du}{dz}$ er n, vil $\frac{du}{dz}$ betragtet som Funktion af u kunne éntydigt fremstilles i en Riemannsk Flade med n Blade. Ved et «enkelt» Forgreningspunkt forstaas et Punkt, hvor to Værdier af $\frac{du}{dz}$ falde sammen, og to Blade af Fladen ere sammenhængende. Et Forgreningspunkt, hvor m Værdier af $\frac{du}{dz}$ falde sammen, regnes for $m - 1$ «enkelte». Er nu q Antallet af «Tværsnit», som behøves for at gjøre Fladen «enkelt sammenhængende», g Antallet af «enkelte» Forgreningspunkter, saa er

$$q = g - 2(n - 1).$$

Er denne Størrelse Nul, og give Uendelighedspunkterne ingen Anledning til Tværsnit, saa forekommer der ingen Periodicitetsmoduler, og det er da sikkert, at der existerer et algebraisk Integral. (Se Durège: Theorie der Functionen einer complexen veränderlichen Grösse, Leipzig 1873, Side 182.)

3.

Exempel.

$$\left(\frac{du}{dz}\right)^3 - 3\left(\frac{du}{dz}\right)^2 - 2(u - 1)^2 + 4 = 0.$$

Den i det foregaaende indførte Funktion $\varphi(u)$ bestemmes her ved Ligningen:

$$1 - 3\varphi(u) + (-2(u-1)^2 + 4)\varphi^3(u) = 0.$$

Den bliver uendelig for

$$u = 1 \pm \sqrt{2} = \begin{cases} \alpha \\ \beta \end{cases}$$

$\varphi(u)$ har i Nærheden af disse Punkter Udviklinger, som begynde med $(u-\alpha)^{-\frac{1}{2}}$ og $(u-\beta)^{-\frac{1}{2}}$. Altsaa er

$$\int \varphi(u)\, du$$

her endeligt. For Omgivelsen af $u = \infty$ finder man

$$\varphi(u) = \left(\tfrac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}} u^{-\frac{2}{3}} + Bu^{-\frac{4}{3}} + \ldots.$$

$$\int \varphi(u)\, du = 3\left(\tfrac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}} u^{\frac{1}{3}} - 3Bu^{-\frac{1}{3}} + \ldots.$$

Det i det foregaaende indførte Tal μ er altsaa her 1. Den søgte Ligning har Formen

$$(A_0 u + B_0) z^3 + (A_1 u + B_1) z^2 + (A_2 u + B_2) z + A_3 u + B_3 = 0.$$

Da imidlertid ingen af Størrelserne u eller z kan blive uendelig, uden at den anden ogsaa bliver det, saa føres man strax til den simplere Form:

$$u = Az^3 + Bz^2 + Cz + D.$$

Skulle $u = 0$ og $z = 0$ svare til hinanden, saa faar man ved Konstanternes Bestemmelse:

$$u = \frac{2}{27} z^3 + \frac{2}{3} z^2 + z.$$ [1])

4.

Hvis Ligningen (1) ikke kan tilfredsstilles ved et algebraisk Integral, ville vi søge at tilfredsstille den ved en enkelt periodisk Funktion.

Hvis u skal være en enkelt periodisk Funktion af z, som for alle endelige Værdier af z har det samme endelige Antal af

---

[1]) Her er $n = 3$, $g = 4$, $q = 0$ og ingen logarithmiske Uendeligheds-steder. Exemplet er taget af den ovenfor citerede Afhandling af **Briot & Bouquet**.

bestemte Værdier, saa maa enhver symmetrisk Funktion af disse Værdier f. Ex. deres Sum, Summen af Produkterne af to og to af dem o. s. v. være en enkelt periodisk Funktion af z med den samme Periode, og som for alle endelige Værdier af z kun har én Værdi. Kaldes Perioden A, blive disse symmetriske Funktioner alle rationale Funktioner af $e^{\frac{2\pi iz}{A}}$. Altsaa bliver u Rod i en algebraisk Ligning, hvis Koefficienter ere rationale Funktioner af $e^{\frac{2\pi iz}{A}}$. Løses denne Ligning med Hensyn til $e^{\frac{2\pi iz}{A}}$, faar man:

$$e^{\frac{2\pi iz}{A}} = F(u) = \text{algbr. Fkt. af } u.$$

$$z = \frac{A}{2\pi i}\,\mathrm{l.}\,F(u).$$

Bruges $\varphi(u)$ i samme Betydning som før, saa er:

$$\int \varphi(u)\,du = \frac{A}{2\pi i}\,\mathrm{l.}\,F(u).$$

Nu kaldes de Steder, hvor $F(u)$ er Nul

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots . \alpha_r,$$

de tilhørende Ordenstal

$$m_1, m_2, m_3, \ldots . m_r.$$

De Steder, hvor $F(u)$ er uendelig stor, kaldes

$$\beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots . \beta_s,$$

Ordenstallene

$$n_1, n_2, n_3, \ldots . n_s.$$

Man har da i Nærheden af α_1

$$F(u) = (u - \alpha_1)^{m_1} F_1(u),$$

hvor $F_1(u)$ er endelig og forskjellig fra Nul i Nærheden af α_1. Da er:

$$\int \varphi(u)\,du = \frac{A}{2\pi i} m_1\,\mathrm{l.}\,(u - \alpha_1) + \frac{A}{2\pi i}\,\mathrm{l.}\,F_1(u).$$

Ved en Omgang om α_1 faar Integralet Tilvæxten (Periodicitetsmodulen) Am_1. Ligesaa gaar det ved de andre Punkter α. I Nærheden af β_1 er

$$F(u) = (u - \beta_1)^{-n_1} \overline{F}_1(u),$$

hvor $\overline{F}_1(u)$ er endelig og forskjellig fra Nul i Nærheden af β_1.

Man faar:

$$\int \varphi(u)\,du = -\frac{A}{2\pi i} n_1 \,\text{l.}\,(u-\beta_1) + \frac{A}{2\pi i} \overline{F}_1(u).$$

Ved en Omgang om β_1 faar Integralet Tilvæxten (Periodicitetsmodulen) $-An_1$. Ligesaa gaar det ved de andre Punkter β. Integralet bliver da kun logarithmisk uendeligt, og alle Periodicitetsmoduler ere hele Multipla af en og samme Størrelse (da Størrelserne m og n ere rationale Tal), eller med andre Ord, der er kun en eneste Periodicitetsmodulus.

Man kan omvendt vise, at naar disse Betingelser ere opfyldte, saa er u en Funktion af den forlangte Beskaffenhed. Thi er Periodicitetsmodulen til Integralet:

$$\int \varphi(u)\,du$$

p, saa er:

$$e^{\frac{2\pi i}{p}(z+C)} = e^{\frac{2\pi i}{p}\int \varphi(u)\,du}$$

en Funktion af u, som i ethvert Punkt kun har et endeligt Antal Værdier. Thi da

$$\frac{2\pi i}{p}\int \varphi(u)\,du$$

har $2\pi i$ til Periodicitetsmodulus, og denne Størrelse er Periode for Exponentialfunktionen, saa kan Integralets Periodicitetsmodulus ikke give Anledning til flere Værdier for Exponentialfunktionen. Naar Integralet er endeligt, er Exponentialfunktionen ogsaa endelig. Hvis nu Diskontinuitetspunkterne for $\int \varphi(u)du$ foreløbig alle antages beliggende i endelig Afstand fra Begyndelsespunktet og betegnes ved

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots.\ \alpha_r,$$

saa kunde man antage, at $\varphi(u)$ her er uendelig som

$$\frac{c_1}{u-\alpha_1},\ \frac{c_2}{u-\alpha_2},\ \ldots.\ \frac{c_r}{u-\alpha_r}.$$

Da bliver Exponenten til e her uendelig som

$$\frac{2\pi i}{p} c_1 \,\text{l.}\,(u-\alpha_1),\ \frac{2\pi i}{p} c_2 \,\text{l.}\,(u-\alpha_2),\ \ldots.\ \frac{2\pi i}{p} c_r \,\text{l.}\,(u-\alpha_r).$$

Her maa alle Størrelserne

$$\frac{2\pi i}{p}c_1, \quad \frac{2\pi i}{p}c_2, \; \ldots . \; \frac{2\pi i}{p}c_r$$

være hele Tal. Thi Integralet

$$\int \varphi(u)\,du$$

har kun den ene Periodicitetsmodulus $2\pi i$; de, som indføres ved Diskontinuiteterne, nemlig

$$\frac{2\pi i}{p}c_1 \,.\, 2\pi i, \quad \frac{2\pi i}{p}c_2 \,.\, 2\pi i, \; \ldots . \; \frac{2\pi i}{p}c_r \,.\, 2\pi i,$$

maa alle være hele Multipla af den ovennævnte. I Nærheden af et af Punkterne a f. Ex. a_s maa man altsaa have:

$$e^{\frac{2\pi i}{p}(z+C)} = (u - a_s)^{m_s} F(u),$$

hvor m_s er hel, og $F(u)$ er endelig og forskjellig fra Nul i Nærheden af a_s. I Omgivelsen af a_s er altsaa

$$e^{\frac{2\pi i}{p}(z+C)}$$

Nul eller algebraisk uendelig. Den har her ligesom i ethvert andet Punkt netop det samme Antal Værdier som $\varphi(u)$. Da saaledes

$$e^{\frac{2\pi i}{p}(z+C)},$$

naar den betragtes som Funktion af u, overalt i Planet kun har n Værdier, og da den kun bliver uendelig i et endeligt Antal Punkter og hver Gang kun af en endelig Orden, saa tør man slutte, at der mellem

$$e^{\frac{2\pi i}{p}(z+C)} \quad \text{og} \quad u$$

maa bestaa en algebraisk Ligning, som med Hensyn til den første er af n^{te} Grad. Ligningens Grad i u bestemmes ved Undersøgelse af Uendelighedspunkterne paa samme Maade som i forrige Tilfælde. Man overbeviser sig let om, at det samme Ræsonnement gjælder, hvis noget af Uendelighedspunkterne falder uendelig langt borte. Kaldes nu Exponentialfunktionen for Kortheds Skyld E, bliver altsaa Ligningen mellem den og u af Formen:

$$U_0 E^n + U_1 E^{n-1} + \ldots . \; U_{n-1} E + U_n = 0. \tag{4}$$

Her ere U'erne hele, rationale Funktioner af u. Deres Grad kan ikke overstige en vis endelig Størrelse μ. For at faa dem bestemte indsættes i deres Sted Polynomier at μ^{te} Grad med ubekjendte Koefficienter. Disse Koefficienter bestemmes da ved, at $\frac{du}{dz}$ bestemt som Funktion af u ifølge (4) skal stemme med $\frac{du}{dz}$ i (1).

5.

Naar den søgte Funktion u for enhver Værdi af z kun skal have et endeligt Antal af Værdier, vil den ikke blot kunne være algebraisk og enkelt periodisk; men den kan ogsaa være dobbelt periodisk. I saa Tilfælde maa Integralet

$$\int \varphi(u)\,du$$

have to Periodicitetsmoduler. Hvis det har flere end to, kan u ikke betragtes som Funktion af z i Ordets almindelige Betydning [1]).

Naar man skal skjelne mellem de forskjellige Kategorier af Integraler, er det ikke uvæsentligt at mærke sig, at hvis

$$\int \varphi(u)\,du$$

bliver uendeligt for et endeligt u, saa kan u ikke være en dobbelt periodisk Funktion af z. Thi hvis u skal være en dobbelt periodisk Funktion af z, maa u kunne faa alle sine Værdier, uden at z bliver uendelig, idet z blot behøver at faa alle Værdier indenfor et Periodeparallelogram for at give alle Værdier af u.

Endvidere bemærkes, at selv om der paa Grund af Graden af Ligningen (1) og Antallet af dens Forgreningspunkter ved første Øjekast synes at høre flere end én Periodicitetsmodulus til $\int \varphi(u)\,du$, saa er det dog alligevel muligt, at der kun er én, idet nemlig flere kunne være hele Multipla af én og samme Størrelse [2]). Dette er altid Tilfældet med to Periodicitetsmoduler, som have et reelt Forhold [3]).

---

[1]) Se Königsbergers ovenfor citerede Skrift, Side 362.

[2]) Periodicitetsmodulernes Beregning er fremstillet hos Königsberger, sjette Forelæsning.

[3]) Königsberger, Side 328.

6.

Exempel. Differentialligningen

$$\left(\frac{du}{dz}\right)^2 = \frac{(u+2)^2(u^2+u+1)}{u-1},$$

giver

$$z + C = \pm\int\frac{(u-1)\,du}{(u+2)\sqrt{u^3-1}}.\text{[1]} \tag{5}$$

Integralet bliver for $u = -2$ logarithmisk uendeligt som

$$\pm i\,\mathrm{l}.\,(u+2).$$

Hvis altsaa u overhovedet er en Funktion af z med et endeligt Antal af Værdier for hver Værdi af z, maa den være enkelt periodisk. Den logarithmiske Diskontinuitet giver en Periodicitetsmodulus

$$P_1 = 2\pi.$$

Hvis u er en enkelt periodisk Funktion af z, saa maa de andre Periodicitetsmoduler staa i rationalt Forhold til P_1. Ifølge bekjendte Sætninger om elliptiske Integraler er der endnu to Periodicitetsmoduler P_2 og P_3, hvis Bestemmelse nu skal angives. Vi betegne Punkterne

$$u = 1, \quad u = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \quad u = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

ved A, B og B'. Da er P_2 Værdien af Integralet (5) taget langs en lukket Linie, der omslutter Punkterne B og B' men ingen andre særegne Punkter. P_3 er Værdien af Integralet (5) taget langs en lukket Linie, som omslutter Punkterne A og B men ingen andre særegne Punkter. Integrationsvejen for P_2 kan sammendrages til følgende af rette Linier sammensatte Vej: fra B' til B, omkring B (Fortegnskifte for Kvadratroden), fra B tilbage til B'.

$$P_2 = \int_{-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i}^{-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i} \frac{u-1}{u+2}\cdot\frac{du}{(+\sqrt{u^3-1})} + \int_{-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i}^{-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i} \frac{u-1}{u+2}\cdot\frac{du}{(-\sqrt{u^3-1})},$$

[1]) Se Tidsskrift for Mathematik, Aargang 1865, Side 12 og 13.

$$P_2 = 2\int_{-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i}^{-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i} \frac{u-1}{u+2}\cdot\frac{du}{\sqrt{u^3-1}},$$

hvor alle Integralerne ere tagne langs de rette Linier mellem Grænserne. Sætter man her

$$u = -\tfrac{1}{2} + iy,$$

saa faar man:

$$P_2 = -\frac{8}{3\sqrt{2}}\int_{-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{+\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{(1-i\,.\,\frac{2}{3}y)^{\frac{3}{2}}}{1+\frac{4}{9}y^2}\cdot\frac{dy}{\sqrt{1-\frac{4}{3}y^2}}.$$

Naar man udvikler Tælleren under Integraltegnet efter Binomialformlen, blive kun de Led imaginære, som indeholde y i Potenser med ulige Exponenter. Derfor forsvinder Integralets imaginære Del, og man kan skrive:

$$P_2 = -\frac{8\sqrt{2}}{3}\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{(1-i\,.\,\frac{2}{3}y)^{\frac{3}{2}}}{1+\frac{4}{9}y^2}\cdot\frac{dy}{\sqrt{1-\frac{4}{3}y^2}},$$

naar man af dette Integral kun tager den reelle Del. Kaldes Skæringspunktet mellem BB' og den reelle Axe for C, kan Integrationsvejen for P_3 sammendrages til følgende brudte Linie: fra A til C, fra C til B, omkring B (Fortegnskifte for Kvadratroden), fra B til C, fra C tilbage til A. Det er det samme som det dobbelte af Integralet fra A til C plus det dobbelte af Integralet fra C til B.

$$P_3 = 2\int_1^{-\frac{1}{2}} \frac{u-1}{u+2}\cdot\frac{du}{\sqrt{u^3-1}} + 2\int_{-\frac{1}{2}}^{-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i} \frac{u-1}{u+2}\cdot\frac{du}{\sqrt{u^3-1}}.$$

Begge Integraler ere tagne langs de rette Linier mellem Grænserne. Det første Integral er rent imaginært, det andet indeholder baade en reel og en imaginær Del. Skal u være en enkelt periodisk Funktion af z, saa maa de imaginære Dele i P_3 hæve hinanden, og P_3 bliver da det halve af P_2. Vi antage, at dette forholder sig saaledes, denne Antagelse kan altid bagefter prøves. Vi beregne derefter den reelle Del af

$$V = \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{(1 - i \,.\, \frac{2}{3}y)^{\frac{3}{2}}}{1 + \frac{4}{9}y^2} \cdot \frac{dy}{\sqrt{1 - \frac{4}{3}y^2}}.$$

Naar
$$\frac{(1 - i \,.\, \frac{2}{3}y)^{\frac{3}{2}}}{1 + \frac{4}{9}y^2}$$
udvikles i Række, og man kun beholder de reelle Led, saa blive de første af disse:

$$\begin{aligned}1 &- 0{,}6111111\,y^2 + 0{,}2762346\,y^4 - 0{,}1233711\,y^6 + 0{,}0549495\,y^8 \\ &- 0{,}0244504\,y^{10} + 0{,}0108745\,y^{12} - 0{,}0048354\,y^{14} + 0{,}0021498\,y^{16} \\ &- 0{,}0009557\,y^{18} + 0{,}0004248\,y^{20} - 0{,}0001888\,y^{22} + 0{,}0000838\,y^{24} \\ &- 0{,}0000373\,y^{26}.\end{aligned}$$

Efter denne Rækkeudvikling er Integralets Bestemmelse gjort afhængig af en Række Integraler af Formen

$$\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{y^{2n}\,dy}{\sqrt{1 - \frac{4}{3}y^2}}.$$

Sættes
$$\frac{2}{\sqrt{3}}y = \sin\varphi,$$

faar man:
$$\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{y^{2n}\,dy}{\sqrt{1 - \frac{4}{3}y^2}} = \left(\frac{3}{4}\right)^n \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n}\varphi\, d\varphi,$$

hvis Værdi er bekjendt. Ad denne Vej findes:

$$\begin{aligned}V = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\pi}{2} \Big\{ 1 &- 0{,}2291667 + 0{,}0582682 - 0{,}0162647 \\ &+ 0{,}0047541 - 0{,}0014279 + 0{,}0004366 \\ &- 0{,}0001352 + 0{,}0000423 - 0{,}0000133 \\ &+ 0{,}0000042 - 0{,}0000013 + 0{,}0000004 \\ &- 0{,}0000001 \Big\},\end{aligned}$$

$$V = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot 0{,}816497.$$

P_3 bliver paa et ligegyldigt Fortegn nær lig med

$$\frac{4\sqrt{2}}{3} V = \frac{2\pi}{3} \cdot \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot 0{,}816497$$

$$= \frac{2\pi}{3} \cdot 1{,}00000.$$

Integralets mindste Periodicitetsmodulus er da $\frac{2\pi}{3}$. De andre ere Multipla af denne. Der maa da mellem

$$u \text{ og } e^{3(z+C)i}$$

bestaa en algebraisk Ligning, som med Hensyn til den sidste er af 2^{den} Grad. Exponentialfunktionen bliver kun paa ét Sted uendelig, nemlig for $u = -2$; Ordenstallet er 3. Da det samme gjælder om

$$e^{-3(z+C)i},$$

maa den ovennævnte algebraiske Ligning have Formen:

$$(u+2)^3 e^{6(z+C)i} + Ae^{3(z+C)i} + (u+2)^3 = 0.$$

A er et helt Polynomium af ikke over 3^{die} Grad. Sættes:

$$\frac{A}{(u+2)^3} = B,$$

faar man:

$$e^{6(z+C)i} + Be^{3(z+C)i} + 1 = 0.$$

Hvis man differentierer denne Ligning og borteliminerer først Exponentialfunktionen og dernæst ved den givne Differentialligning $\frac{du}{dz}$, saa kommer der:

$$-\frac{1}{4} B^2 - \frac{1}{36} \left(\frac{dB}{du}\right)^2 \frac{(u+2)^2 (u^2+u+1)}{u-1} + 1 = 0.$$

Sætter man her

$$u + 2 = v,$$

$$B = b_0 + b_1 v^{-1} + b_2 v^{-2} + b_3 v^{-3},$$

saa udkommer der:

$$(36 - 9 b_0^2) v + (-18 b_0 b_1 + 27 b_0^2 - b_1^2 - 108)$$
$$+ (-6 b_1^2 - 18 b_0 b_2 + 54 b_0 b_1 - 4 b_1 b_2) v^{-1}$$
$$+ (-18 b_0 b_3 - 6 b_1 b_2 + 24 b_1^2 + 54 b_0 b_2 - 6 b_1 b_3 - 4 b_2^2) v^{-2}$$
$$+ (3 b_2^2 + 54 b_0 b_3 + 42 b_1 b_2 - 12 b_2 b_3) v^{-3}$$
$$+ (18 b_2 b_3 + 36 b_1 b_3 + 15 b_2^2 - 9 b_3^2) v^{-4} + (18 b_3^2 + 18 b_2 b_3) v^{-5} = 0.$$

Koefficienterne i denne Ligning forsvinde identisk, naar man sætter:

$$b_0 = -2,\ b_1 = 36,\ b_2 = -108,\ b_3 = 108.$$

Derved bliver den søgte Ligning til:

$$e^{6(z+C)i} + (-2 + 36v^{-1} - 108v^{-2} + 108v^{-3})e^{3(z+C)i} + 1 = 0.$$

Indføres atter u, faar man:

$$(u+2)^3 e^{6(z+C)i} + (-2u^3 + 24u^2 + 12u + 20)e^{3(z+C)i} + (u+2)^3 = 0,$$

som tilfredsstiller den givne Differentialligning.

7.

Ved den i det foregaaende udviklede Fremgangsmaade til Bestemmelse af de enkelt periodisk Funktioner er der den Mangel, at Periodicitetsmodulerne kun ere bestemte med Tilnærmelse. For at finde de nøjagtige Forhold imellem dem maa man i Almindelighed kjende deres nøjagtige Talværdier, og til disses Bestemmelse existerer der ingen almindelig Methode. Til Trods for denne Mangel turde det dog maaske alligevel vise sig, at Methoden i adskillige Tilfælde kan benyttes til Integrationens Udførelse, naar Periodicitetsmodulerne bestemmes med en nogenlunde antagelig Nøjagtighed.